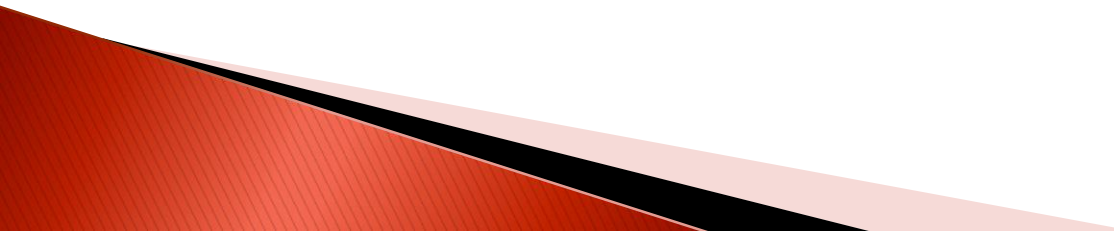


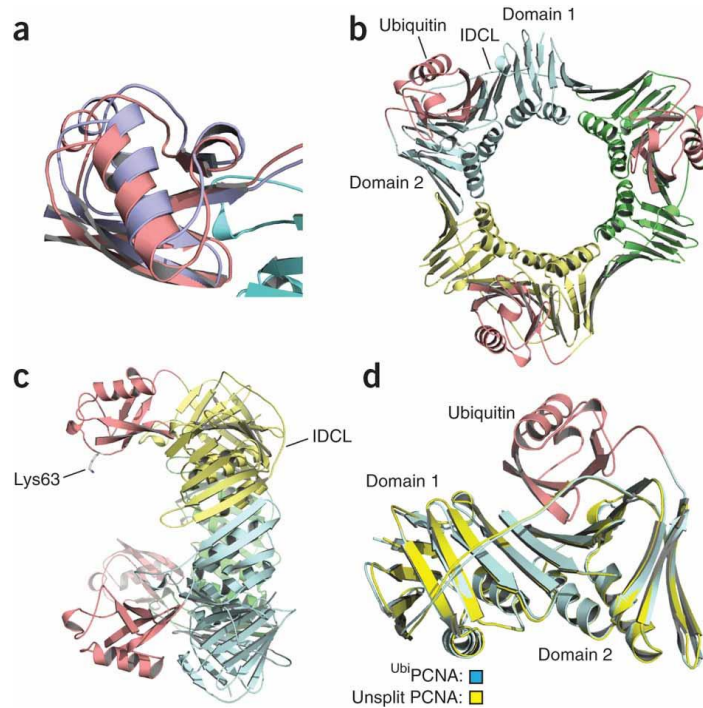
# Modelarea si simularea robotilor

**Roboti paraleli**

# Cuprins

- ▶ Sinteza structurala a mecanismelor paralele
  - ▶ Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice
  - ▶ Modelarea geometrica
    - Model geometric invers
    - Model geometric direct
  - ▶ Analiza spatiului de lucru
  - ▶ Singularitati
  - ▶ Modelarea cinematica
    - Model cinematic invers
    - Model cinematic direct
- 

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele



# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Un **mecanism paralel**, la modul general, poate fi definit ca fiind [Mer 06]: *un mecanism cu lanț cinematic închis, al cărui end-efector este legat de bază prin mai multe lanțuri cinematice independente.*

Această definiție a mecanismelor paralele este foarte generală întrucât include și **mecanisme redundante** (care au mai multe cuple motoare decât numărul de grade de libertate controlate ale end-efectorului) precum și **manipulatoare care lucrează împreună**.

Pentru a restrânge numărul **mecanismelor** care conform definiției ar putea fi numite **paralele**, se impun câteva **caracteristici suplimentare**:

- End-efectorul este susținut de cel puțin două lanțuri cinematice. Fiecare din aceste lanțuri conține cel puțin un actuator simplu. Există un senzor care să măsoare valoarea variabilelor asociate cu acționarea (unghi de rotație sau mișcare liniară);
- Numărul de actuatori este egal cu numărul de grade de libertate al end-efectorului;
- Mobilitatea mecanismului este zero (manipulatorul este blocat) atunci când toți actuatorii sunt blocați.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Tipurile de mecanisme care respectă condițiile de mai sus prezintă următoarele avantaje:  
Existența a cel puțin două lanțuri cinematice permite distribuția sarcinii manipulate între acestea;

Numărul de actuatori folosiți este minim;

Numărul de senzori necesar pentru controlul în buclă închisă a mecanismului este minim;

Când actuatorii sunt blocați mecanismul își menține poziția: caracteristică de siguranță în foarte multe aplicații cum ar fi cele medicale.

Astfel Merlet propune următoarea definiție pentru roboții paraleli [Mer 06]: *un **robot paralel** este format dintr-un end-efector cu  $n$  grade de libertate, și o bază fixă, conectate împreună prin cel puțin două lanțuri cinematice independente. Acționarea se face cu ajutorul a  $n$  actuatori simpli.*

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Roboții paraleli pentru care numărul de lanțuri cinematice este strict egal cu numărul de grade de libertate al end-efectorului se mai numesc manipolatoare pur paralele [Gos 88]. Gosselin caracterizează acest tip de roboți cu ajutorul ecuației:

$$p \cdot (n - 6) = -6$$

unde **p** reprezintă numărul de lanțuri cinematice iar **n** numărul de corpuri rigide din cadrul unui lanț.

Analizând mișcările pe care o structură le poate efectua, se pot distinge două mari clase (grupe) de roboți:

Roboți planari – *roboți care posedă trei grade de libertate în plan;*

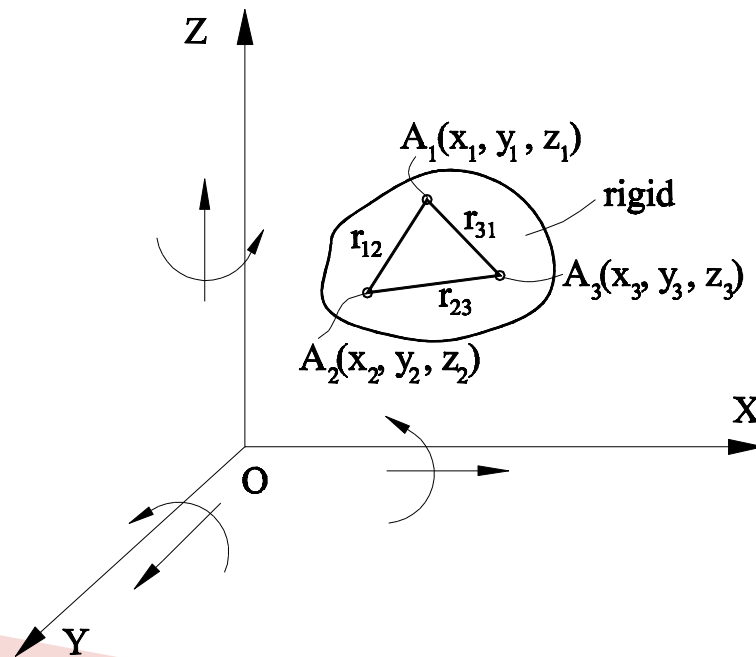
Roboți spațiali – *roboți a căror mișcare nu are loc într-un singur plan.*

Prima etapă în analiza unui mecanism este stabilirea numărului de grade de libertate al acestuia, pentru a vedea, la o structură complexă dacă nu cumva aceasta posedă mai multe grade de libertate decât actuatori.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Prima etapă în analiza unui mecanism este stabilirea numărului de grade de libertate al acestuia, pentru a vedea, la o structură complexă dacă nu cumva aceasta posedă mai multe grade de libertate decât actuatori.

Pentru un corp rigid, în spațiu, se pot defini, față de un sistem de referință un număr de maximum 6 grade de libertate





# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Considerând rigidul din figura anterioara, pentru a putea să îi definim mișcarea avem nevoie de trei puncte ale rigidului cu ajutorul cărora acesta poate fi analizat față de sistemul de coordonate XYZ. Deși la prima vedere, sistemul este caracterizat de 9 puncte distincte

$$x_i, y_i, z_i \quad i = 1 \dots 3$$

Intre acestea se definesc o serie de constrângeri:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - r_{12}^2 = 0 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - r_{31}^2 = 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - r_{23}^2 = 0 \end{cases}$$

Față de sistemul de referință OXYZ se pot defini astfel 6 grade de libertate, și anume trei translații pe direcția celor trei axe, OX, OY și OZ și trei rotații, în jurul acestor axe.



# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Considerând cazul general, al roboților pur paraleli cu  $m$  grade de libertate, aceștia posedă  $m$  lanțuri cinematice conectate la end-efector. Dacă aceste lanțuri sunt identice, se poate folosi pentru analiza structurală formula lui Grübler, pe baza căreia se obține numărul de grade de libertate al mecanismului:

$$m = 6 \cdot (l - n - 1) + \sum_{i=1}^n d_i$$

unde sunt folosite următoarele notații:  $m$  – numărul de grade de libertate (mobilitate) al mecanismului;  $l$  – numărul total de corpuri rigide a mecanismului, inclusiv baza;  $n$  - numărul total de cuple; -  $d_i$  numărul de grade de libertate a cuplei  $i$ . Dacă valoarea lui  $m$  este negativă, se poate spune că mecanismul este supra-constrâns (conform acestei ecuații mecanismul este blocat și nu are nici un grad de libertate). Acest lucru este însă uneori eronat, pentru că nu sunt luate în considerare relațiile geometrice între cuple, putându-se obține mecanisme (Bennet 1914, Goldberg 1943, Mavroidis 1997) supra-constrânse care au unul sau mai multe grade de libertate. Cu toate că uneori rezultatele obținute sunt eronate, formula lui Grübler se consideră a fi suficientă pentru analiza preliminară.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Unul dintre pionierii acestor mecanisme, cel care a fost primul cercetător care a propus utilizarea mecanismelor cu lanțuri cinematice închise la noi în țară în anii 70, prof. Plitea, face o sinteză a mecanismelor de roboți paraleli stabilind și o formulă de calcul pentru analiza structurală a acestora.

Gradul de mobilitate al platformei se poate determina utilizând relația:

$$M = (6 - F) \cdot N - (5 - F) \cdot C_5 - (4 - F) \cdot C_4 - (3 - F) \cdot C_3 - (2 - F) \cdot C_2 - (1 - F) \cdot C_1$$



$$M = (6 - F) \cdot N - \sum_{i=1..5} (i - F) \cdot C_i$$

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

$$M = (6 - F) \cdot N - (5 - F) \cdot C_5 - (4 - F) \cdot C_4 - (3 - F) \cdot C_3 - (2 - F) \cdot C_2 - (1 - F) \cdot C_1$$

Unde:

M – gradul de mobilitate al mecanismului paralel;

F – familia mecanismului;

N – numărul de elemente;

$C_i$  - numărul de cuple de clasa  $i$ , unde  $i$  reprezintă numărul de grade de libertate suprimate (o cuplă  $C_5$  are clasa 5, deci posedă un grad de libertate (având 5 gdl suprimate din cele 6 maxim posibile)).

Termenii

$(6 - F) \dots (1 - F)$  nu pot lua valori negative.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Numarul de elemente mobile,  $N$ , ale unui mecanism se poate obtine pe baza relatiei precedente, si este:

$$N = \frac{1}{6 - F} \cdot \sum_{i=1..5} [M + (i - F) \cdot C_i]$$

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Pentru structuri simetrice, cum ar fi robotul Delta, platforma Gough, robotul plan 3-RRR, se introduc urmatoarele ecuatii:

$$N = k \cdot n + 1, \quad C_i = k \cdot c_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

Unde:

$N$  – numărul de elemente;

$k$  – numărul de lanțuri de legătură între efectorul final și batiu;

$n$  – numărul de elemente pe un lanț cinematic pentru structurile simetrice;

$c_i$  - numărul de cuple de clasa  $i$ , pe un singur lant cinematic al structurii simetrice.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

In acest caz, numarul de elemente mobile pe un singur lant cinematic se calculeaza din formulele precedente si are urmatoarea ecuatie:

$$n = \frac{1}{k \cdot (6 - F)} \cdot \left\{ M - (6 - F) + k \cdot [(5 - F) \cdot C_5 + (4 - F) \cdot C_4 + (3 - F) \cdot C_3 + (2 - F) \cdot C_2 + (1 - F) \cdot C_1] \right\}$$



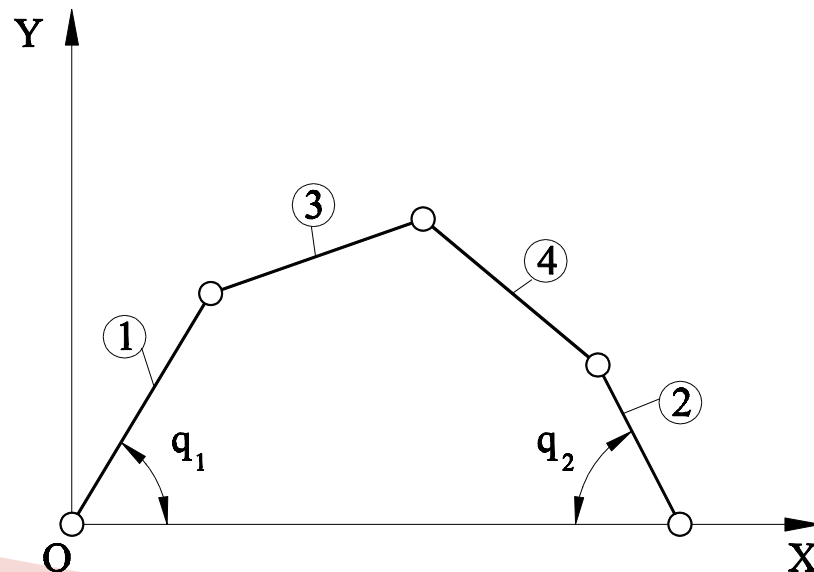
$$n = \frac{1}{k \cdot (6 - F)} \cdot \left\{ M - (6 - F) + k \cdot \sum_{i=1..5} (i - F) \cdot c_i \right\}$$

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

În cadrul formulelor de sinteză structurală, elementul cheie, care permite generalizarea formulei propusă de Plitea este determinarea corectă a familiei mecanismului.

Se poate da o definiție a familiei unui mecanism: *numărul de restricții impuse pentru un grad de libertate comune tuturor elementelor mecanismului.*

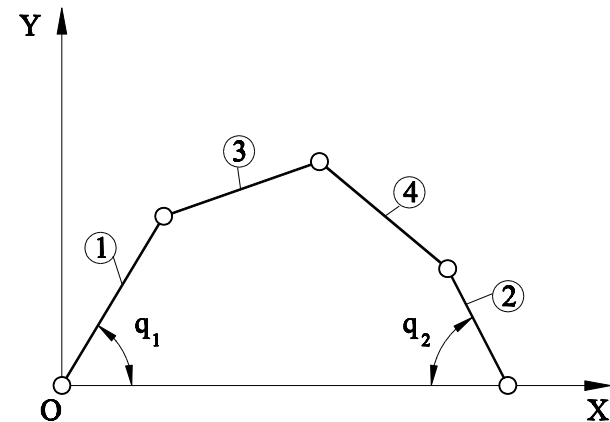
Spre exemplificare se consideră **mecanismul pentalater** din figura următoare, la care se consideră că avem două cuple motoare,  $q_1$  și  $q_2$  și trei cuple pasive. Toate cele cinci cuple sunt cuple de rotație, având un singur grad de libertate.





# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Se determină restricțiile și mișcările posibile pentru fiecare element al mecanismului, conform tabelului de mai jos.

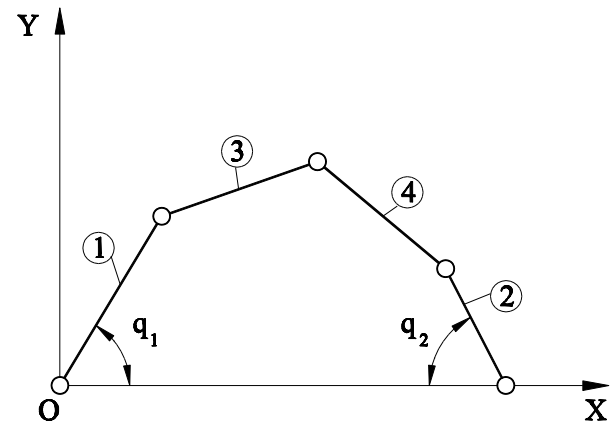


Tabel 1.1. Analiza mișcărilor posibile ale elementelor mecanismului pentalater

Element	Mișcări posibile					
	$T_x$	$T_y$	$T_z$	$R_x$	$R_y$	$R_z$
1	-	-	-	-	-	+
2	-	-	-	-	-	+
3	+	+	-	-	-	+
4	+	+	-	-	-	+

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Se determină restricțiile și mișcările posibile pentru fiecare element al mecanismului, conform tabelului anterior.



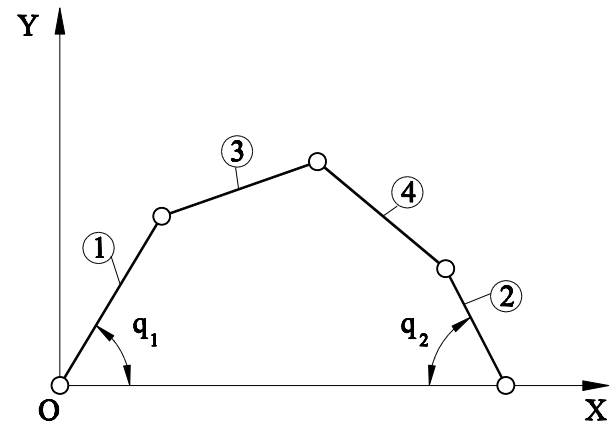
Se observă că pentru toate elementele, 1...4 ale mecanismului pentalater există un număr de 3 mișcări blocate (translația pe Z și rotația în jurul axelor X și Y). Pe baza definiției dată pentru familia mecanismului se poate spune că mecanismul pentalater este de familia

$$F = 0 + 3 = 3$$

**!!Definitie:** numărul de restricții impuse pentru un grad de libertate comune tuturor elementelor mecanismului.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

Se determină restricțiile și mișcările posibile pentru fiecare element al mecanismului, conform tabelului anterior.

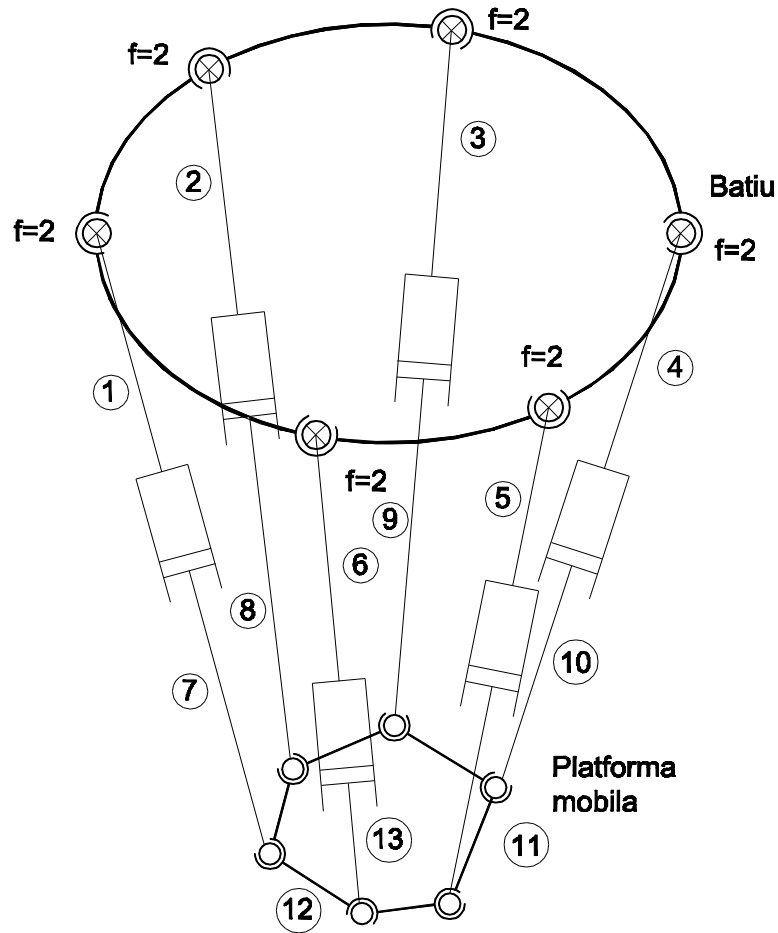
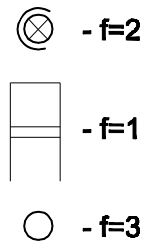


Pe baza ecuatiilor anterioare rezulta:

$$\begin{aligned} M &= (6 - F) \cdot N - (5 - F) \cdot C_5 - (4 - F) \cdot C_4 - (3 - F) \cdot C_3 - (2 - F) \cdot C_2 - (1 - F) \cdot C_1 = \\ &= 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2 \end{aligned}$$

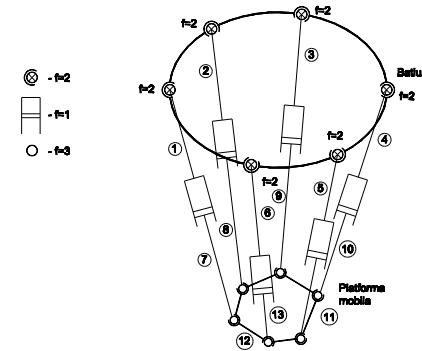
Adică, mecanismul are **M=2** grade de mobilitate.

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele



**Exemplul 2:** Mecanism cu structură paralelă cu 6 lanțuri cinematice

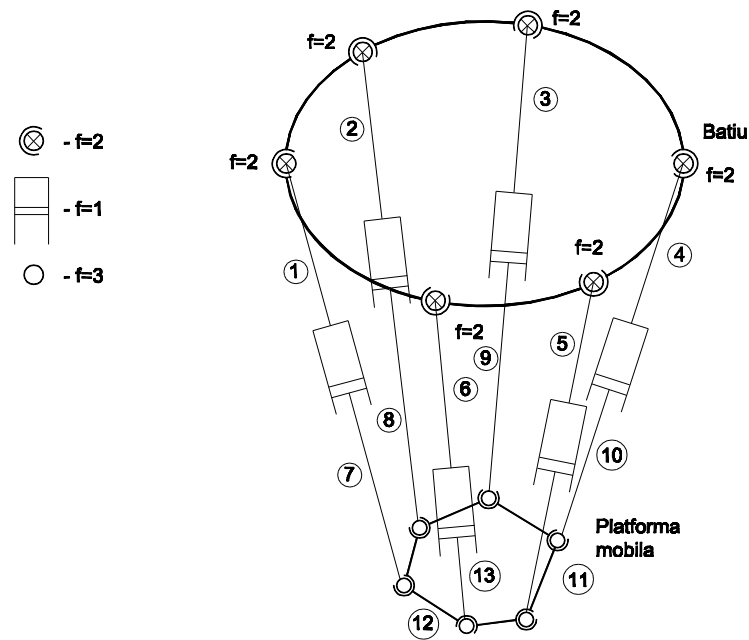
# Sinteza structurala a mecanismelor paralele



Tabel 1.2. Analiza mișcărilor posibile ale elementelor mecanismului simetric

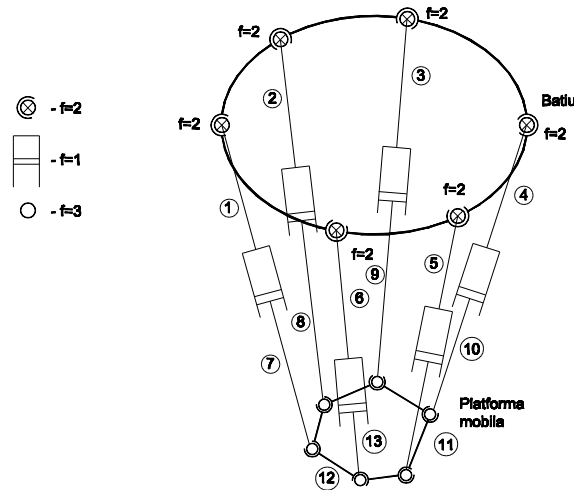
Element	Mișcări posibile					
	$T_x$	$T_y$	$T_z$	$R_x$	$R_y$	$R_z$
1	-	-	-	+	+	-
2	-	-	-	+	+	-
3	-	-	-	+	+	-
4	-	-	-	+	+	-
5	-	-	-	+	+	-
6	-	-	-	+	+	-
7	-	-	+	+	+	+
8	-	-	+	+	+	+
9	-	-	+	+	+	+
10	-	-	+	+	+	+
11	-	-	+	+	+	+
12	-	-	+	+	+	+
13	+	+	+	+	+	+

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele



Se observă că mecanismul nu blochează nici o mișcare pentru toate elementele componente ale mecanismului, deci este mecanism de familia  $F=0$ .

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele



Astfel, gradul de mobilitate al mecanismului este:

$$M = 6 \cdot 13 - 6 \cdot 5 - 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 6$$

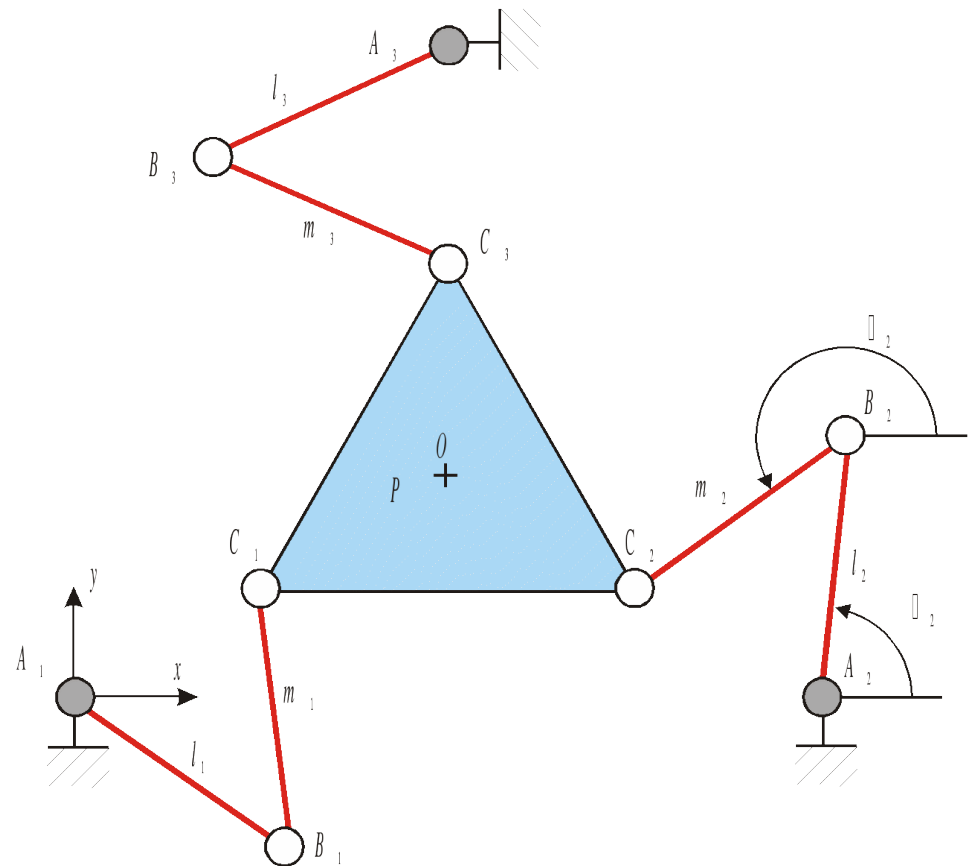
**Intrebare:** Ce se intampla daca in cazul acestui mecanism avem cuple sferice in locul celor cardanice de la baza robotului?



# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

**Exercitiu.** Calculati gradul de mobilitate al robotului plan 3-RRR

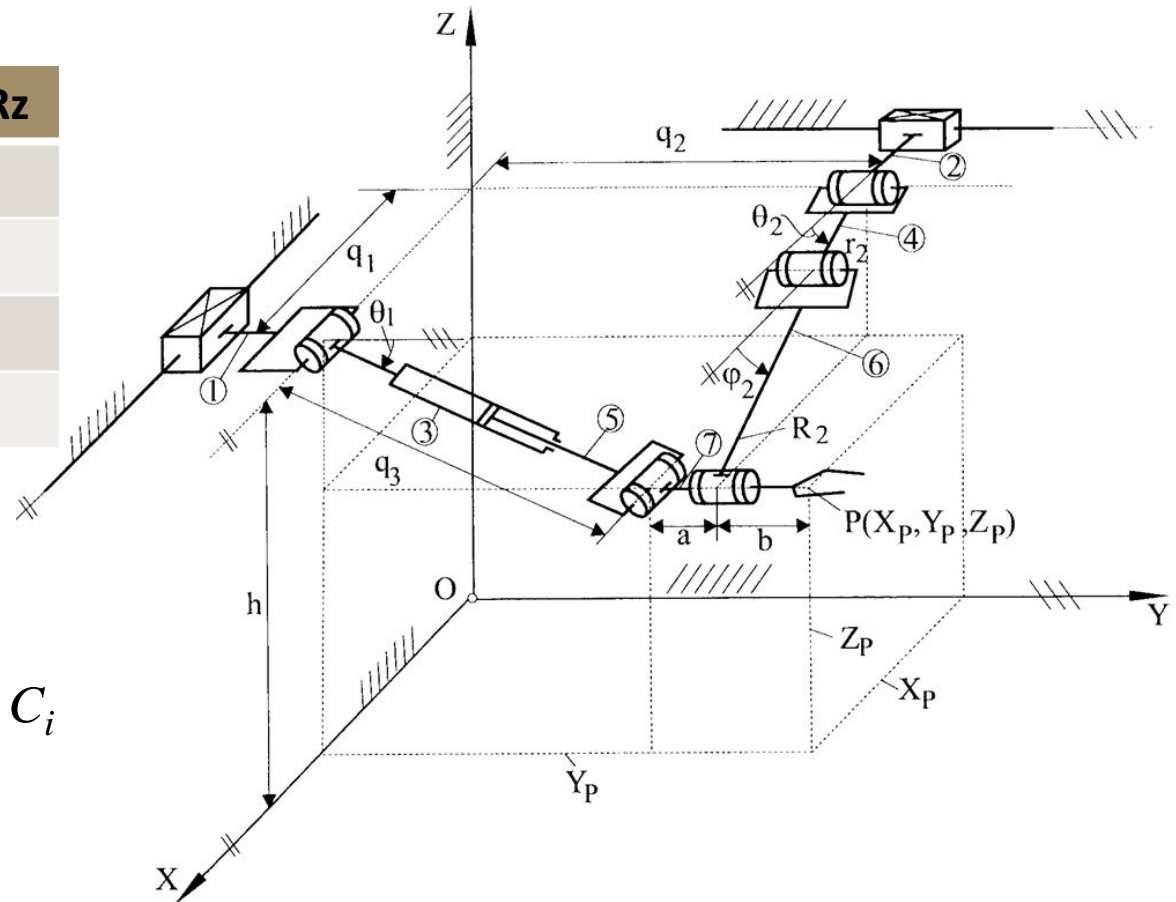
	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
1						
2						
3						
...						



$$M = (6 - F) \cdot N - \sum_{i=1..5} (i - F) \cdot C_i$$

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
1						
2						
3						
...						



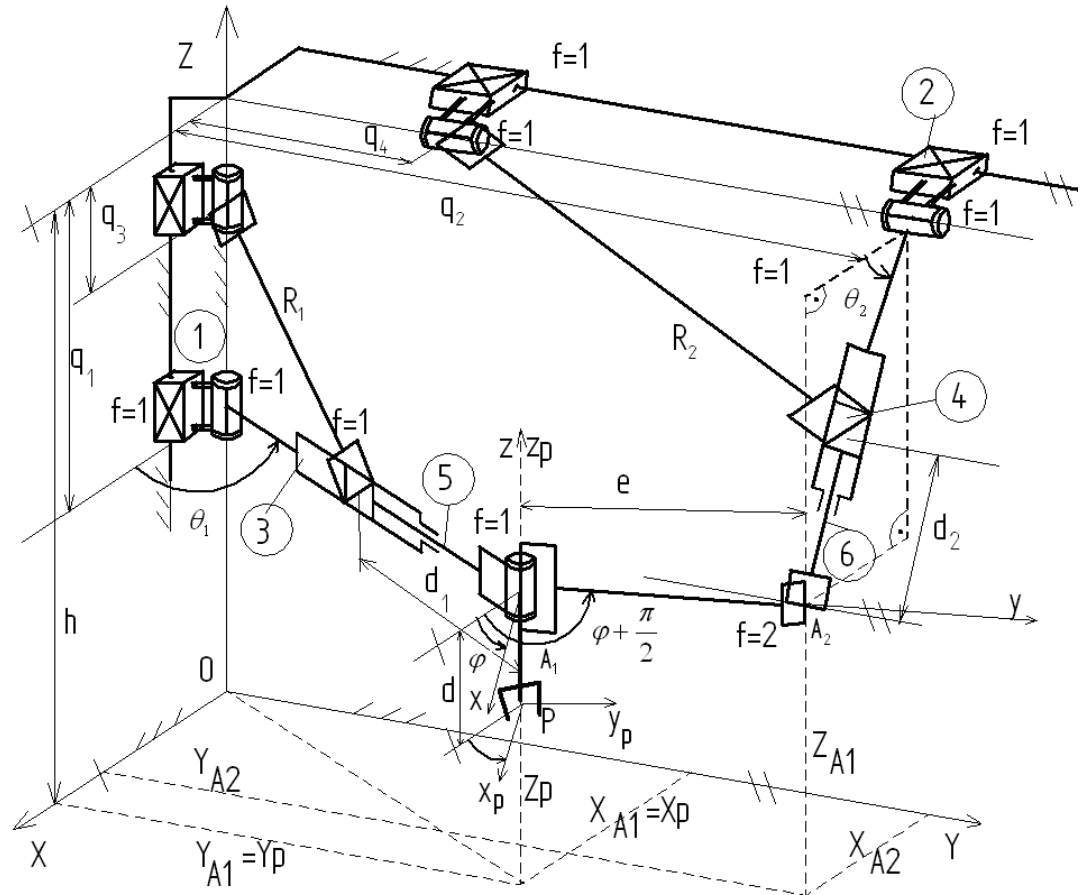
$$M = (6 - F) \cdot N - \sum_{i=1..5} (i - F) \cdot C_i$$

**Exercitiu.** Calculati gradul de mobilitate al robotului din figura

# Sinteza structurala a mecanismelor paralele

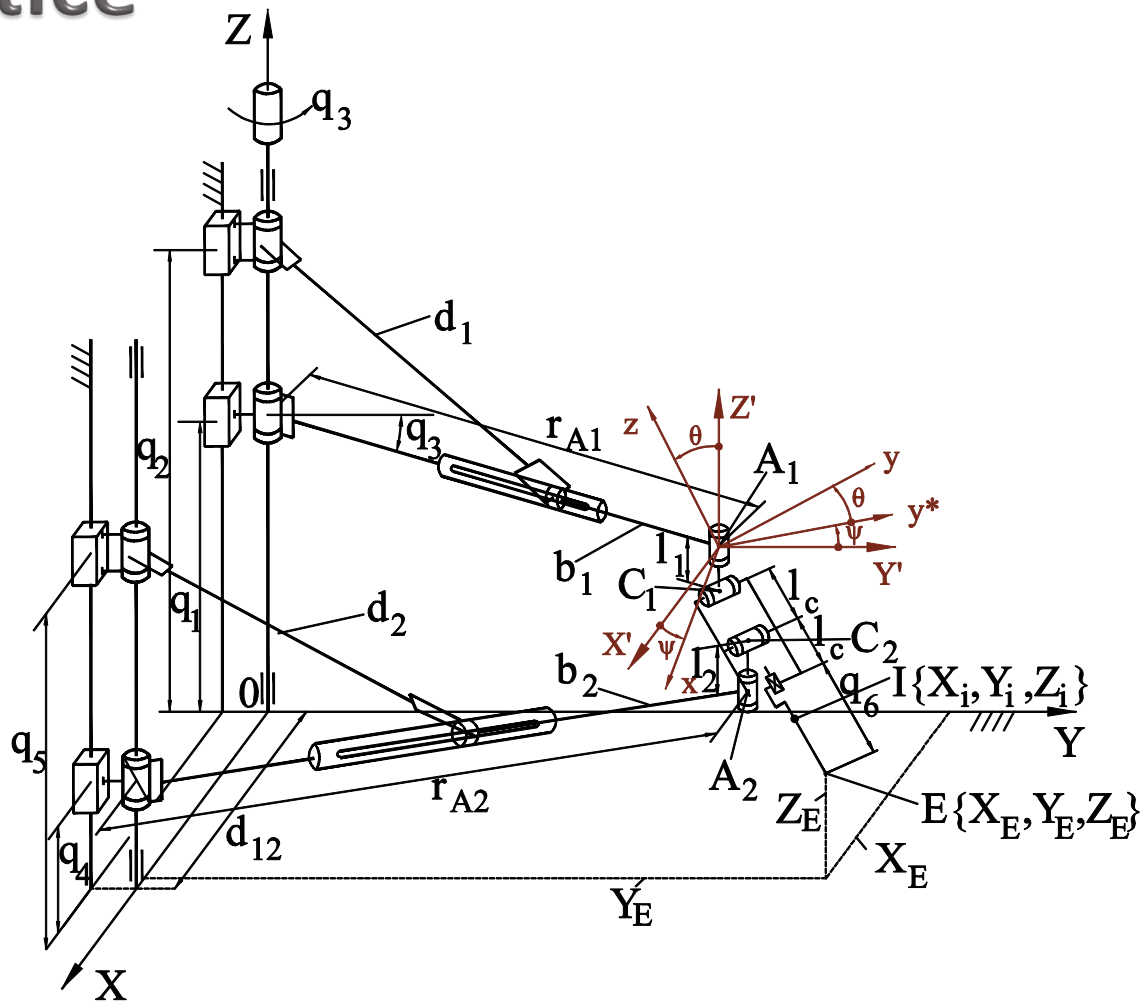
	T <sub>x</sub>	T <sub>y</sub>	T <sub>z</sub>	R <sub>x</sub>	R <sub>y</sub>	R <sub>z</sub>
1						
2						
3						
...						

$$M = (6 - F) \cdot N - \sum_{i=1..5} (i - F) \cdot C_i$$



**Exercitiu.** Calculati gradul de mobilitate al robotului din figura

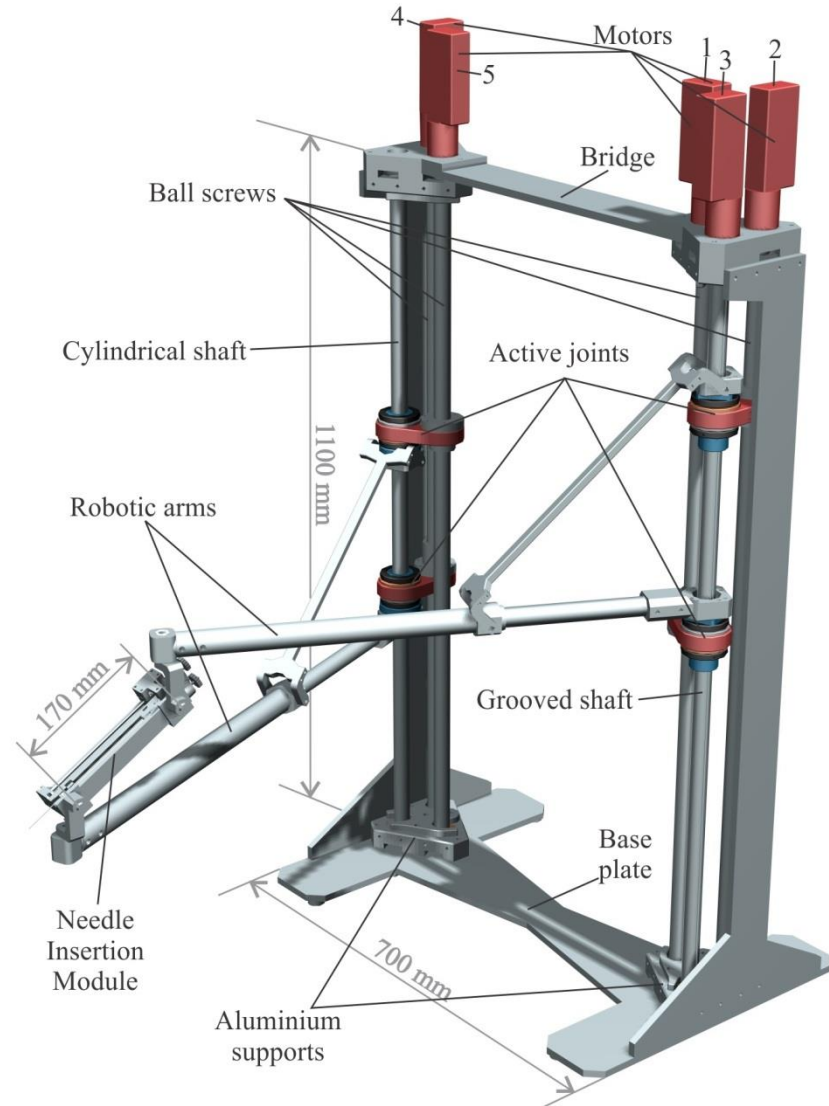
# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice



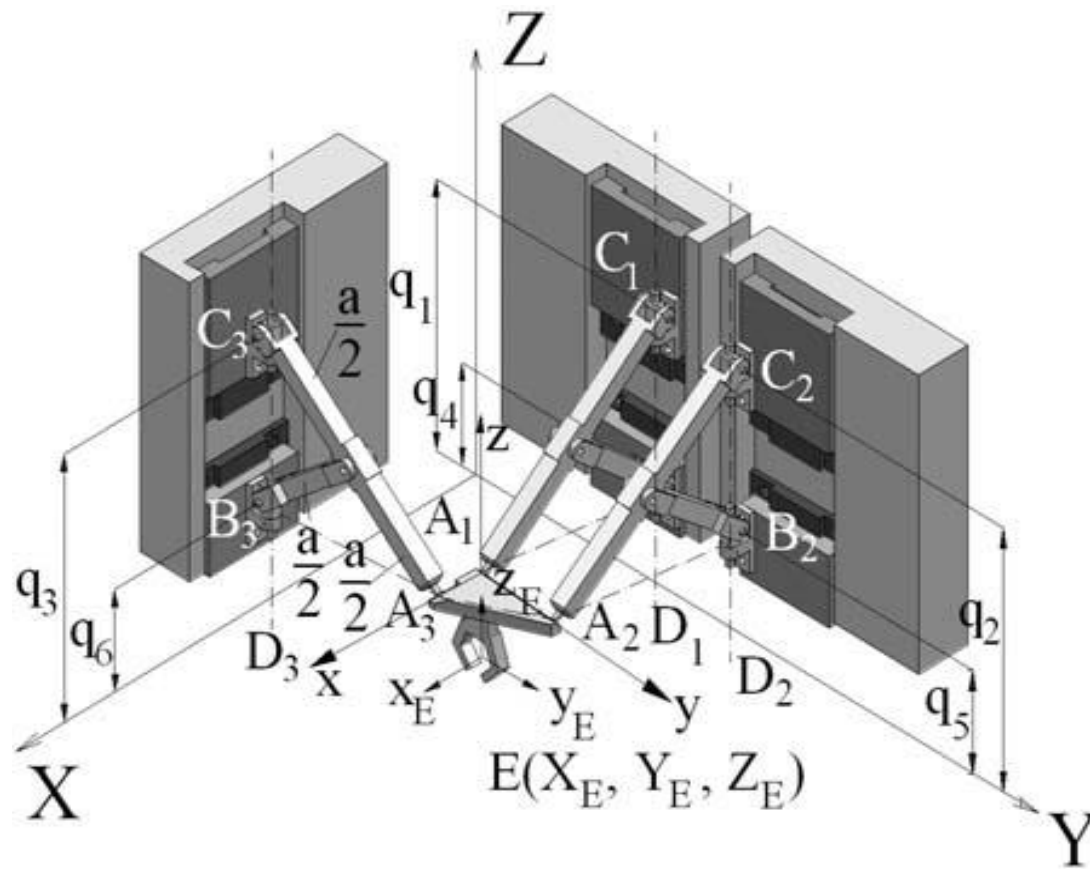
Schema cinematica a robotului PARA-BRACHYROB

# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice

Modelul experimental al  
tobotului PARA-BRACHYROB



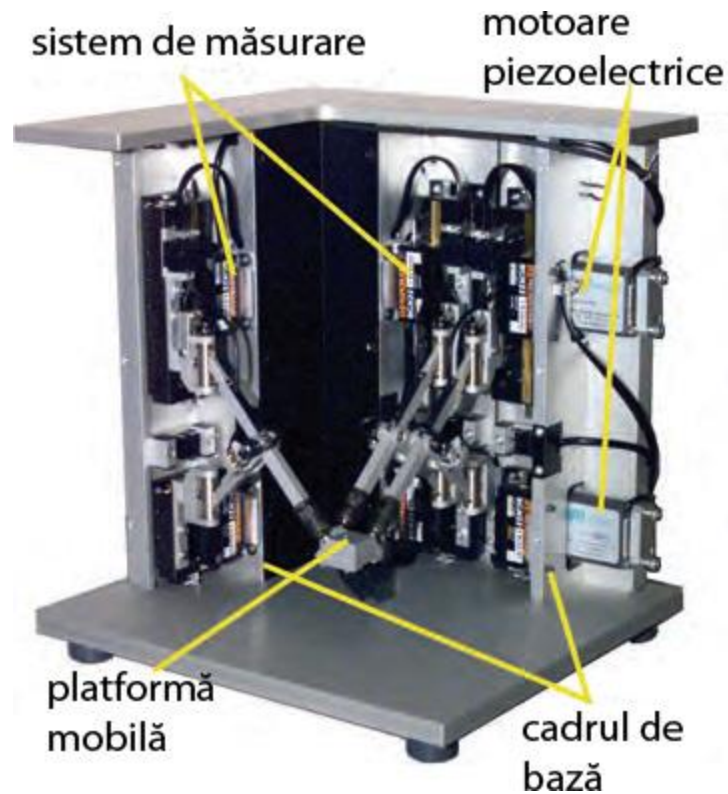
# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice



Schema cinematica a robotului MICABOh



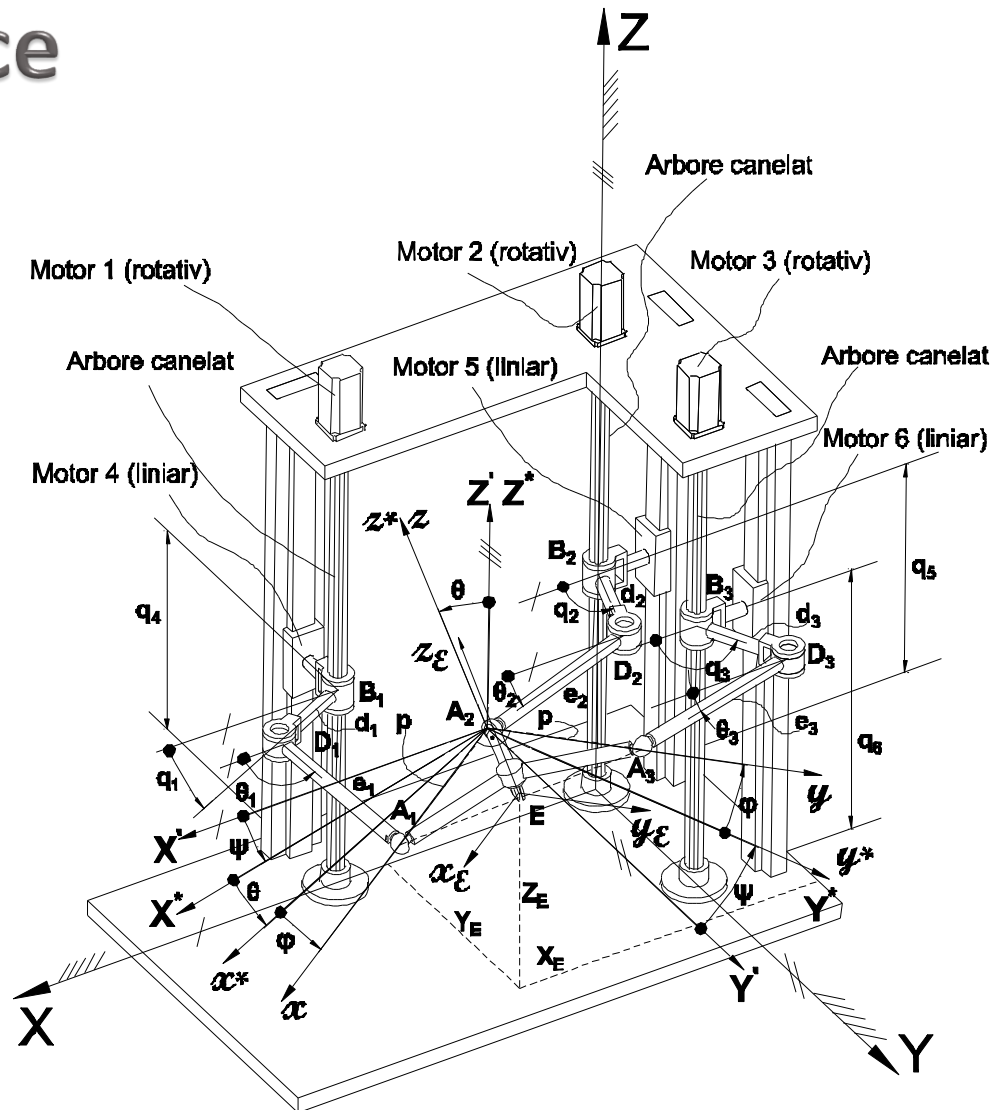
# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice



Modelul experimental al robotului MICABOh



# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice



Schema cinematica a robotului RECROB

# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice

Element	Mișcări posibile					
	$T_x$	$T_y$	$T_z$	$R_x$	$R_y$	$R_z$
1	-	-	+	-	-	+
2	-	-	+	-	-	+
3	-	-	+	-	-	+
4	+	+	+	-	-	+
5	+	+	+	-	-	+
6	+	+	+	-	-	+
7	+	+	+	+	+	+

# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice

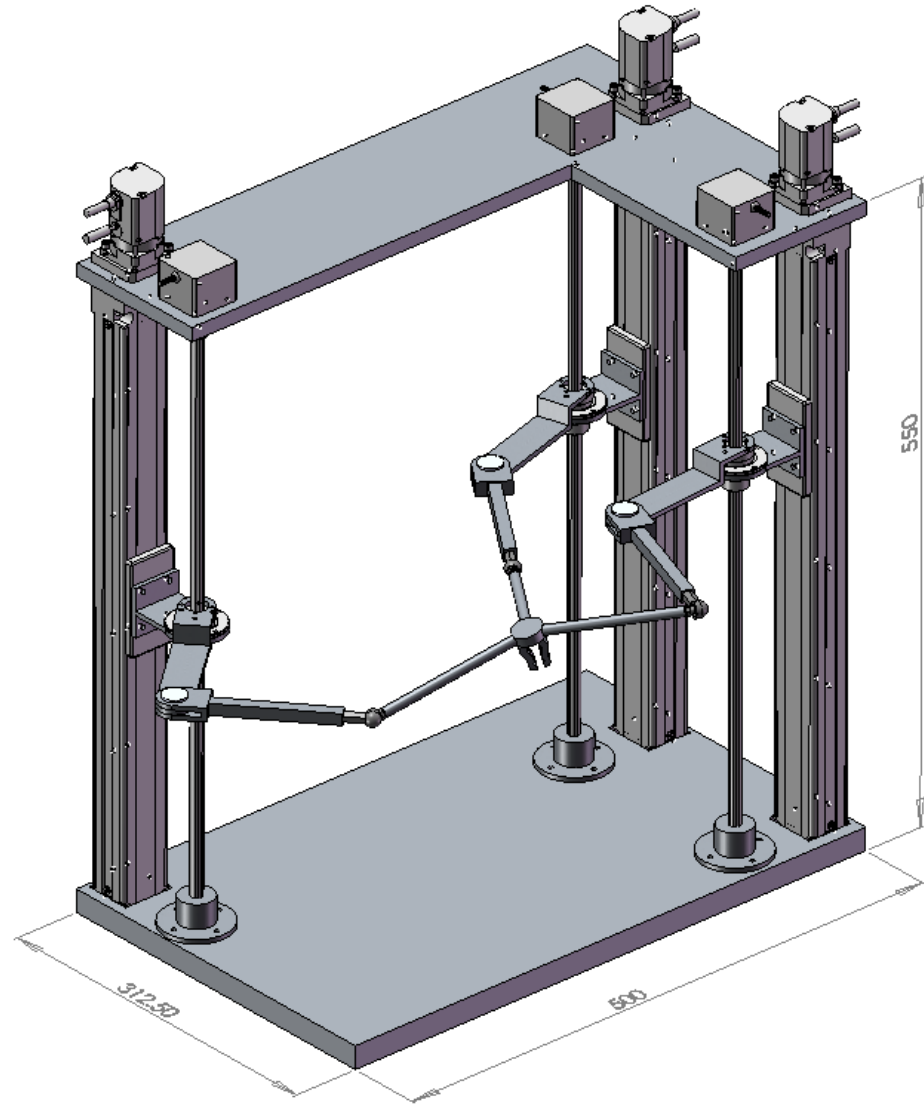
Pentru simplitate, în calculul mobilității robotului s-a făcut următoarea simplificare: ansamblul cuplelor active este considerat ca fiind o cuplă de clasa a IV-a, cilindrică. Parametrii rezultați sunt:

$$F = 0, N = 7, C_5 = 3, C_4 = 3, C_3 = 3$$

$$M = 6 \cdot N - 5 \cdot C_5 - 4 \cdot C_4 - 3 \cdot C_3 = 42 - 15 - 12 - 9 = 6$$

# Modelarea si reprezentarea schemelor cinematice

Modelul experimental al robotului RECROB



# Modelarea geometrica

Modelarea cinematică a oricărei structuri robotizate oferă informații vitale care definesc structura atât din punct de vedere dimensional cât și a comportării acesteia în spațiul de lucru singurul aspect neglijat fiind masele componentelor, care sunt studiate în modelul dinamic. Orice structură robotizată poate fi abordată în două moduri, în funcție de parametri cunoscuți:

**modelarea directă** – consideră cunoscuți parametrii (geometrici, vitezele și accelerațiile) cuplelor motoare, urmând ca prin aplicarea unor algoritmi de calcul să se determine parametrii caracteristici efectorului final (poziții, viteze, accelerații);

**modelarea inversă** – consideră cunoscuți parametrii efectorului final urmând ca pe baza acestora să se determine valorile/variațiile corespunzătoare în cuplele motoare ale robotului.

Întrucât între structurile seriale și cele paralele există diferențe majore în structura lanțurilor cinemate, în lucrările de specialitate cinematica celor două tipuri de structuri este abordată separat [Ang 05, Mer 06, Neg 97].

# Modelarea geometrica a robotilor seriali

Structurile seriale sunt prezentate într-o sinteză amplă în lucrările [Ang 05], [Neg 97] unde sunt evidențiate metodele de lucru, specificul fiecărei metode precum și o multitudine de exemple numerice.

Astfel pentru modelarea geometrică Negrean propune o ecuație empirică ce face legătura între cuplele motoare ale unui robot serial și coordonatele efectorului final:

$$\bar{\theta} \leftrightarrow {}^0\bar{X}$$

$\bar{\theta}$  reprezintă vectorul coloană al coordonatelor generalizate a cuplelor motoare:

$$\bar{\theta} = [q_i, i = 1 \dots n]^T$$

${}^0\bar{X}$  reprezintă vectorul coloană care definește poziția și orientarea efectorului final al robotului față de sistemul de coordonate fix, notat cu 0:

$${}^0\bar{X} = [{}^0X_j, j = 1 \dots m]^T$$

# Modelarea geometrica a robotilor seriali

Astfel, între cei doi vectori se pot defini ecuațiile fundamentale pentru modelarea geometrică directă și inversă:

$${}^0\bar{X} = f(\bar{\theta})$$

$$\bar{\theta} = f^{-1}({}^0\bar{X})$$

Unde  $f$  reprezintă un operator liniar de transformare directă, iar  $f^{-1}$  un operator neliniar de transformare inversă. Această observație trebuie făcută întrucât, așa cum demonstrează și literatura, în cazul roboților seriali modelarea directă este mult mai ușoară, rapidă și compactă ca și volum de calcul decât cea inversă în care de cele mai multe ori se obțin ecuații neliniare pentru care nu există un algoritm general de calcul.



# Modelarea geometrica a robotilor seriali

Sintetic, pentru modelarea geometrică directă a structurilor seriale există mai multe metode de calcul:

- ✓ metoda vectorială;
- ✓ metoda matricelor de rotație;
- ✓ metoda operatorilor compuși tip PG;
- ✓ metoda operatorilor compuși DH;
- ✓ metoda matricelor exponențiale;
- ✓ iar pentru modelarea geometrică inversă:
- ✓ metoda ecuațiilor transcendente;
- ✓ metoda algebrică.

# Modelarea cinematica a robotilor seriali

**Modelarea geometrică** a unei structuri robotice **nu permite controlul asupra vitezei și accelerației** pe traiectoria de mișcare. Pentru acest lucru vectorii introduși în paragraful anterior devin **funcții de timp**, variația acestora oferind informațiile despre vitezele și accelerațiile din cuplele motoare și respectiv cele ale efectorului final:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(t) \quad \bar{X} = \bar{X}(t)$$

În monografia [Neg 97] ecuațiile fundamentale pentru modelarea cinematică a unui robot serial cu  $n$  grade de libertate sunt descrise simbolic sub forma:

$$\begin{cases} (n)0 \dot{\bar{X}} = f(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) \\ (n)0 \ddot{\bar{X}} = f(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, \ddot{\bar{\theta}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{\theta}} = f^{-1}(\bar{\theta}, (n)0 \dot{\bar{X}}) \\ \ddot{\bar{\theta}} = f^{-1}(\bar{\theta}, (n)0 \dot{\bar{X}}, (n)0 \ddot{\bar{X}}) \end{cases}$$

# Modelarea cinematica a robotilor seriali

Unde:

$$\{\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}, \ddot{\bar{\theta}}\} = [\{q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)\}; \quad i = 1 \dots n]^T$$

reprezintă vectorul coloană al pozițiilor, vitezelor și accelerațiilor generalizate ce caracterizează mișcarea din fiecare cuplă motoare, iar

$${}^{(n)}_0 \dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} {}^{(n)}_0 \bar{v}_n^T & {}^{(n)}_0 \bar{\omega}_n^T \end{bmatrix}^T \quad {}^{(n)}_0 \ddot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} {}^{(n)}_0 \dot{\bar{v}}_n^T & {}^{(n)}_0 \dot{\bar{\omega}}_n^T \end{bmatrix}^T$$

reprezintă vectorul coloană al vitezelor și accelerațiilor exprimate față de sistemul de coordonate fix  $\{0\}$  sau cel legat de efectorul final  $\{n\}$  și caracterizează mișcarea efectorului final în raport cu sistemul fix de coordonate  $\{0\}$

# Modelarea cinematica a robotilor seriali

În mod similar cu modelul geometric, ecuațiile anterioare caracterizează modelul cinematic direct, unde sunt cunoscute variabilele, vitezele și accelerațiile cuplelor motoare, pe baza cărora se pot determina parametrii cinematici (viteze și accelerații) pentru efectorul final. Pentru rezolvarea modelului cinematic direct se pot aplica diferite metode, cum ar fi:

- ✓ metoda matricelor de poziționare-orientare;
- ✓ metoda iterativă;
- ✓ metoda matricei Jacobi.

Ecuațiile pentru modelul cinematic invers sau modelul de comandă. Acest model se mai numește și model de comandă pentru că în acest caz sunt considerate cunoscute valorile parametrilor cinematici ai efectorului final pentru acestea determinându-se variațiile/valorile parametrilor cinematici în cuplele motoare. În acest caz, în lucrarea [Neg 97] se recomandă ca și metode de lucru:

- ✓ metoda inverselor generalizate;
- ✓ metoda pseudoinversei.

# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

Una dintre cele mai bine și bogat documentate lucrări care descrie modelarea cinematică a roboților paraleli este cartea scrisă de Merlet, *Parallel Robots – Roboți Paraleli*. Lucrarea este o sinteză a rezultatelor obținute în domeniu până în prezent, și descrie un număr foarte mare de structuri paralele cu particularitățile structurale ale fiecăreia.

Modelul cinematic invers al structurilor paralele, care furnizează coordonatele cuplelor motoare pentru o poziție și orientare dată a end-efectorului (sau platformei mobile) este relativ simplu spre deosebire de cel al roboților seriali.

Determinarea modelului cinematic invers este critic pentru definirea ecuațiilor de comandă pentru un robot paralel. Există mai multe modalități de reprezentare a poziției și orientării unui corp solid, printr-un set de parametrii,  $\mathbf{X}$ . Modalitatea folosită cel mai des se referă la folosirea coordonatelor relative la un sistem de referință a unui punct C a aceluși corp și un set de trei unghiuri care definesc orientarea acestuia. Există și alte metode, dintre care se amintesc [Mer 06] maparea cinematică care înregistrează deplasarea într-un spațiu cu 6 dimensiuni sau studiul quadric, într-un spațiu cu 7 dimensiuni.

# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

*Metoda analitică.* Dacă se consideră fiecare dintre lanțurile care leagă baza de platforma mobilă, se notează cu A extremitatea care este legată de bază și cu B extremitatea legată de platforma mobilă. Din construcție coordonatele punctului A sunt cunoscute în raport cu sistemul fix de referință, iar coordonatele punctului B se pot determina din poziția și orientarea platformei mobile. Astfel vectorul **AB** este fundamental pentru problema cinematică inversă având un rol critic în obținerea soluției. Dacă se consideră **X** ca reprezentând coordonatele generalizate ale platformei mobile se poate scrie:

$$AB = AO + OB = H_1(X)$$

Pe baza acestei relații empirice se determină pozițiile punctelor extreme pentru toate lanțurile pentru care se dorește determinarea coordonatelor cuplelor (sau mai simplu spus coordonatele cuplelor motoare).

Coordonatele cuplelor lanțurilor cinematice, notate cu  $\Theta$  permit determinarea vectorului **AB**, cu ajutorul valorilor din **X**:

# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

Coordonatele cuplelor lanțurilor cinematice, notate cu  $\Theta$  permit determinarea vectorului  $\mathbf{AB}$ , cu ajutorul valorilor din  $\mathbf{X}$ :

$$AB = H_2(X, \Theta)$$

Determinarea coordonatelor cuplelor pot fi determinare prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$H_1(X) = H_2(X, \Theta)$$

Dacă există un număr de  $p$  lanțuri care fac legătura între bază și efectorul final, numărul de necunoscute din ecuația de mai sus va fi de  $3p$  ( $2p$  în cazul roboților planari). Alternativ, se consideră că există un număr de  $\mathbf{N}$  cuple, dintre care  $n$  cuple motoare, ceea ce indică un număr de  $n$  necunoscute în  $\mathbf{X}$ . Dacă actuatorii sunt blocați (adică necunoscutele  $n$  au o valoare constantă) rămân un număr de  $\mathbf{N}$  necunoscute. Astfel, în cazul în care mobilitatea efectorului final ar fi 0, ar trebui să existe în sistemul de mai sus un număr de  $\mathbf{N}$  ecuații.

# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

În cazul general, cum ar fi de exemplu un lanț cinematic serial 6R soluția ar fi deosebit de complexă. Însă lanțurile cinemate folosite în cazul roboților paraleli sunt lanțuri foarte simple iar soluția matematică nu pune nici un fel de probleme, doar un impact deosebit asupra creșterii performanțelor într-o anumite aplicație ar justifica utilizarea unor lanțuri complexe, și mai greu de rezolvat.

Trebuie subliniat că prin rezolvarea sistemului anterior se vor determina atât coordonatele cuplelor active cât și cele ale cuplelor pasive.

$$H_1(X) = H_2(X, \Theta)$$



# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

*Metoda geometrică.* Prin abordarea geometrică a modelării cinemate inverse se consideră cunoscute pozițiile extremităților A și B a fiecărui braț în spațiul cartezian. Se poate astfel secționa brațul într-un punct M obținându-se astfel două mecanisme diferite,  $M_A$   $M_B$  constituite din lanțurile cinemate dintre punctele M și A respectiv M și B. Mișcarea liberă a cuplelor în aceste două lanțuri va avea loc în așa fel încât punctul M, membru al  $M_A$  va lua valori într-o mulțime  $V_A$  iar ca și membru al  $M_B$  va lua valori într-o mulțime  $V_B$ . Soluția problemei cinemate inverse va fi reprezentată de intersecția celor două mulțimi de valori  $V_A$  și  $V_B$ . Întrucât numărul de soluții trebuie să fie finit, (altfel robotul nu poate fi controlat) adică pentru a determina cele trei coordonate ale punctelor comune mulțimilor  $V_A$  și  $V_B$  este nevoie de trei ecuații independente care descriu cele două mulțimi.

# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

Cu toate că se ajunge la problema rezolvării unui sistem, metoda geometrică are o serie de avantaje față de cea prezentată anterior:

- ✓ ținând cont că punctul de tăiere este liber acest lucru conferă o oarecare libertate în sistemul final de ecuații, ceea ce poate fi de folos în găsirea soluției;
- ✓ variațiile alese descriu obiecte geometrice ale căror intersecție a fost studiată deja din punct de vedere geometric;
- ✓ intersecția de mulțimi algebrice este un subiect mult studiat iar multitudinea de metode permit găsirea limitelor numărului de puncte de intersecție fără calculul efectiv al acestora.

Dezavantajul acestei metode este dependența masivă a complexității sistemului de ecuații de alegerea punctului de separare, ceea ce nu permite implementarea unei soluții general valabile.

# Modelarea cinematica a robotilor paraleli

**Problema cinematică directă** urmărește determinarea poziției și orientării efectorului final pe baza parametrilor cinematici ai cuplelor motoare. Acest model este echivalent cu rezolvarea ecuațiilor modelului cinematic invers, rezultatele pentru aceleași seturi de valori trebuind să coincidă. Problema cinematică directă, de cele mai multe ori, nu conduce la o soluție unică și în general, nu se poate exprima într-o formă analitică funcția care face legătura între coordonatele generalizate și coordonatele cuplelor motoare. Merlet [Mer 06] subliniază faptul că deși timpii de calcul pentru obținerea unei soluții în modelarea directă au scăzut, datorită creșterii puterii de calcul a calculatoarelor, acești timpi sunt încă prea mari pentru a putea fi adecvați unui control în timp real. În plus nu există încă un algoritm cunoscut care să permită determinarea poziției și orientării curente a platformei din setul de soluții obținute.

Cel mai fericit caz posibil în problema cinematică directă este **găsirea unei soluții analitice** pentru rezolvarea acesteia lucru care pe lângă minimizarea timpului de calcul oferă și posibilitatea validării modelului cinematic invers care poate fi apoi utilizat în comanda robotului.

# Modelarea geometrica a robotilor paraleli – o abordare sinoptica

Modelarea geometrică a roboților paraleli presupune, într-o abordare sinoptică, definirea unor relații de legătură între coordonatele cuplelor motoare (cuplele active ale robotului) și coordonatele efectorului final.

Se definesc astfel, la modul general, doi vectori, de forma:

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

pentru vectorul cuplelor motoare si

$$X = [X_E, Y_E, Z_E, \psi, \theta, \varphi]^T$$

pentru vectorul coordonatelor efectorului final.

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Se dau:

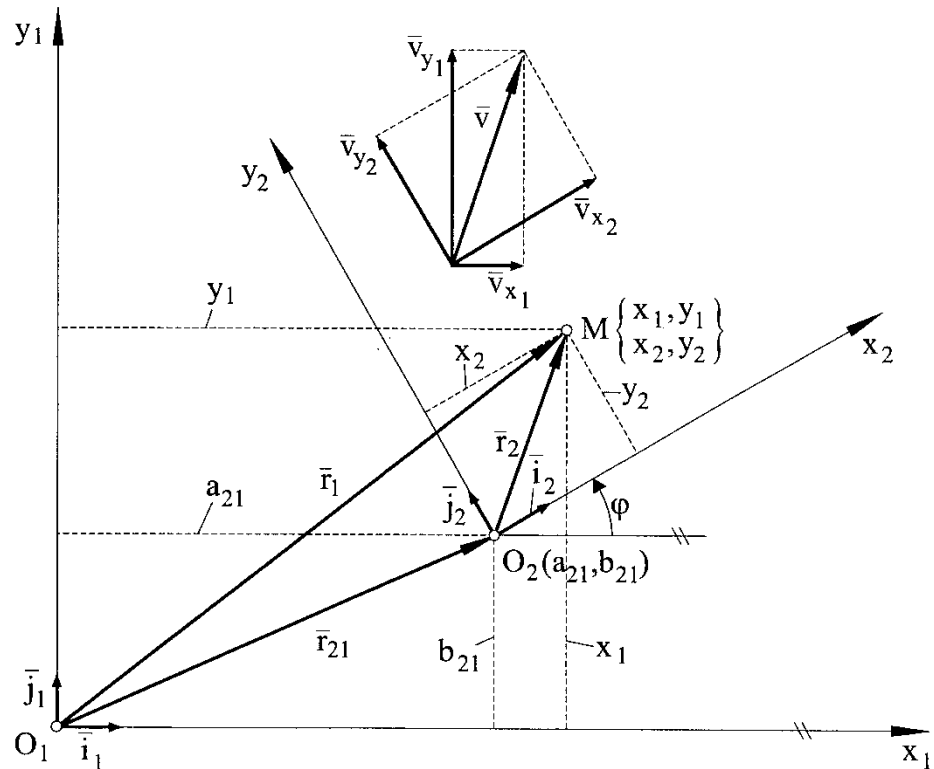
$$x_2, y_2, a_{21}, b_{21}, \varphi, v_{x_2}, v_{y_2}$$

Se cer:

$$x_1, y_1, v_{x_1}, v_{y_1}$$

Relatiile intre versori:

	$\vec{i}_2$	$\vec{j}_2$
$\vec{i}_1$	$\alpha' = \varphi$	$\alpha'' = \varphi + \frac{\pi}{2}$
$\vec{j}_1$	$\beta' = \varphi - \frac{\pi}{2}$	$\beta'' = \varphi$



# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Sunt cunoscute relatiile:

$$\vec{r}_2 = x_2 \cdot \vec{i}_2 + y_2 \cdot \vec{j}_2$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{21} = (x_1 - a_{21}) \cdot \vec{i}_2 + (y_1 - b_{21}) \cdot \vec{j}_2$$

Pe baza tabelului anterior, si a relatiilor vectoriale intre sisteme de coordonate se pot scrie relatiile:

$$\vec{i}_2 = (C\alpha') \cdot \vec{i}_1 + (C\beta') \cdot \vec{j}_1$$

$$\vec{j}_2 = (C\alpha'') \cdot \vec{i}_1 + (C\beta'') \cdot \vec{j}_1$$



$$\vec{r}_2 = x_2 \cdot [(C\alpha') \cdot \vec{i}_1 + (C\beta') \cdot \vec{j}_1] + y_2 \cdot [(C\alpha'') \cdot \vec{i}_1 + (C\beta'') \cdot \vec{j}_1]$$



$$\vec{r}_2 = [(C\alpha') \cdot x_2 + (C\alpha'') \cdot y_2] \cdot \vec{i}_1 + [(C\beta') \cdot x_2 + (C\beta'') \cdot y_2] \cdot \vec{j}_1$$

**!!Obs.** Se vor folosi notatiile **C** pentru cosinus si **S** pentru sinus

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Intre cosinusii directori si unghiul  $\varphi$ :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline C\alpha' = C\varphi & C\alpha'' = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -S\varphi \\ \hline C\beta' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & C\beta'' = C\varphi \\ \hline \end{array}$$

Din relatiile anterioare se poate scrie sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} x_1 - a_{21} = (C\alpha') \cdot x_2 + (C\alpha'') \cdot y_2 \\ y_1 - b_{21} = (C\beta') \cdot x_2 + (C\beta'') \cdot y_2 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x_1 - a_{21} \\ y_1 - b_{21} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' \\ C\beta' & C\beta'' \end{bmatrix}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ b_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' \\ C\beta' & C\beta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & a_{21} \\ C\beta' & C\beta'' & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{12}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din relatiile anterioare se poate scrie sistemul de ecuatii:

$$\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' \\ C\beta' & C\beta'' \end{bmatrix}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & a_{21} \\ C\beta' & C\beta'' & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{12}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi \\ S\varphi & C\varphi \end{bmatrix}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & a_{21} \\ S\varphi & C\varphi & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{12}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din relatiile anterioare si a proprietatilor calculului matriceal, se definesc urmatoarele relatii:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' \\ C\beta' & C\beta'' \end{bmatrix}^{-1}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - a_{21} \\ y_1 - b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' \\ C\alpha'' & C\beta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' \\ C\alpha'' & C\beta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' \\ C\alpha'' & C\beta'' \end{bmatrix}}_{R_{21}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - a_{21} \\ y_1 - b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' \\ C\alpha'' & C\beta'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(a_{21} \cdot C\alpha' + b_{21} \cdot C\beta') \\ -(a_{21} \cdot C\alpha'' + b_{21} \cdot C\beta'') \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & -(a_{21} \cdot C\alpha' + b_{21} \cdot C\beta') \\ C\alpha'' & C\beta'' & -(a_{21} \cdot C\alpha'' + b_{21} \cdot C\beta'') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Adica:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi \\ -S\varphi & C\varphi \end{bmatrix}}_{R_{21}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - a_{21} \\ y_1 - b_{21} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & -(a_{21}C\varphi - b_{21}S\varphi) \\ -S\varphi & C\varphi & -(a_{21}S\varphi + b_{21}C\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi \\ -S\varphi & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(a_{21}C\varphi - b_{21}S\varphi) \\ -(a_{21}S\varphi + b_{21}C\varphi) \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Iar pentru vectorii  $v_1$  si  $v_2$ , rezulta in mod similar relatiile:

$$\begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' \\ C\alpha'' & C\beta'' \end{bmatrix}}_{R_{21}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi \\ -S\varphi & C\varphi \end{bmatrix}}_{R_{21}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \end{bmatrix}$$

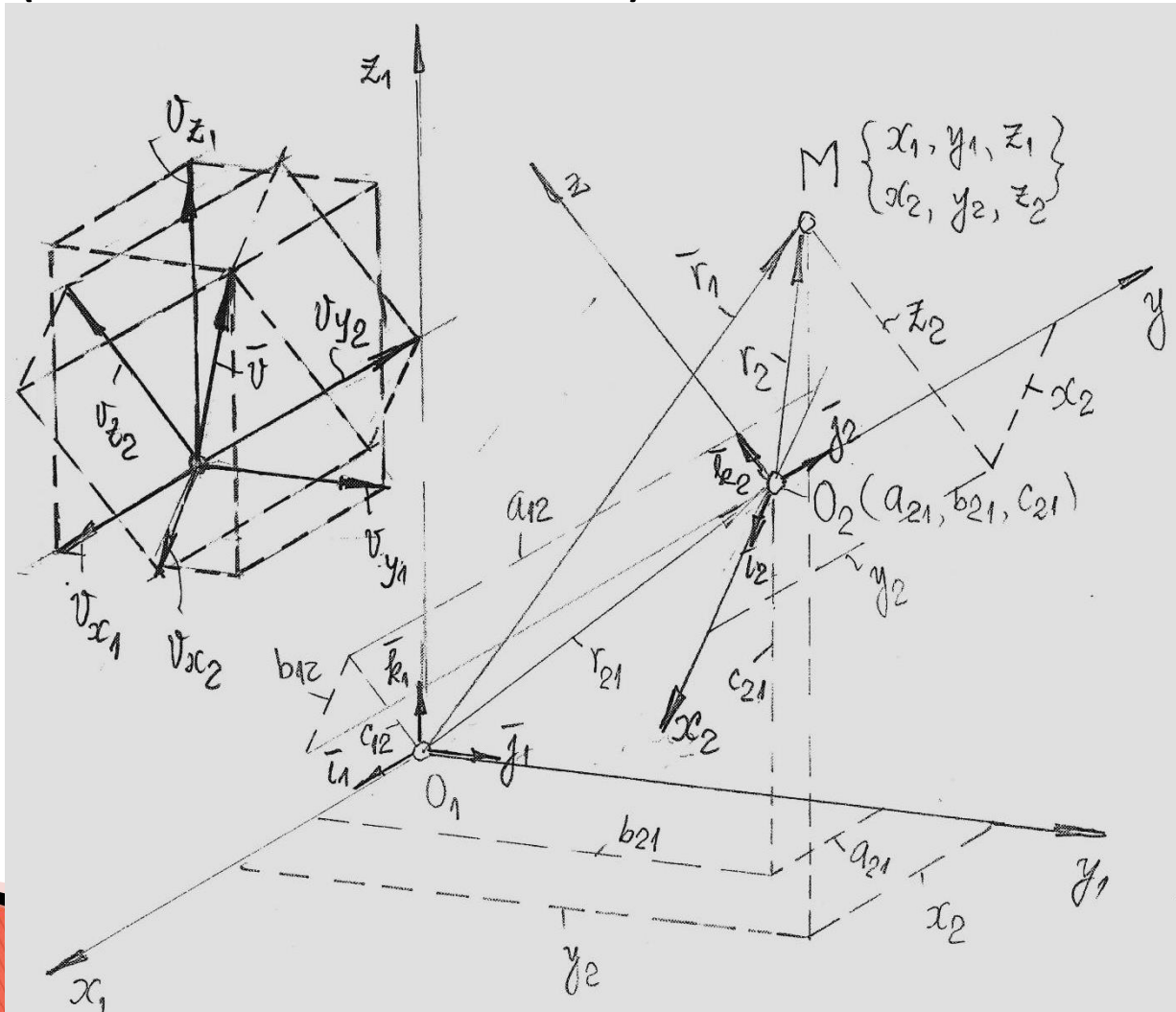


$$\begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & -(a_{21}C\alpha' - b_{21}C\beta') \\ C\alpha'' & C\beta'' & -(a_{21}C\alpha'' + b_{21}C\beta'') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & -(a_{21}C\alpha' - b_{21}C\beta') \\ -S\varphi & C\varphi & -(a_{21}C\alpha'' + b_{21}C\beta'') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

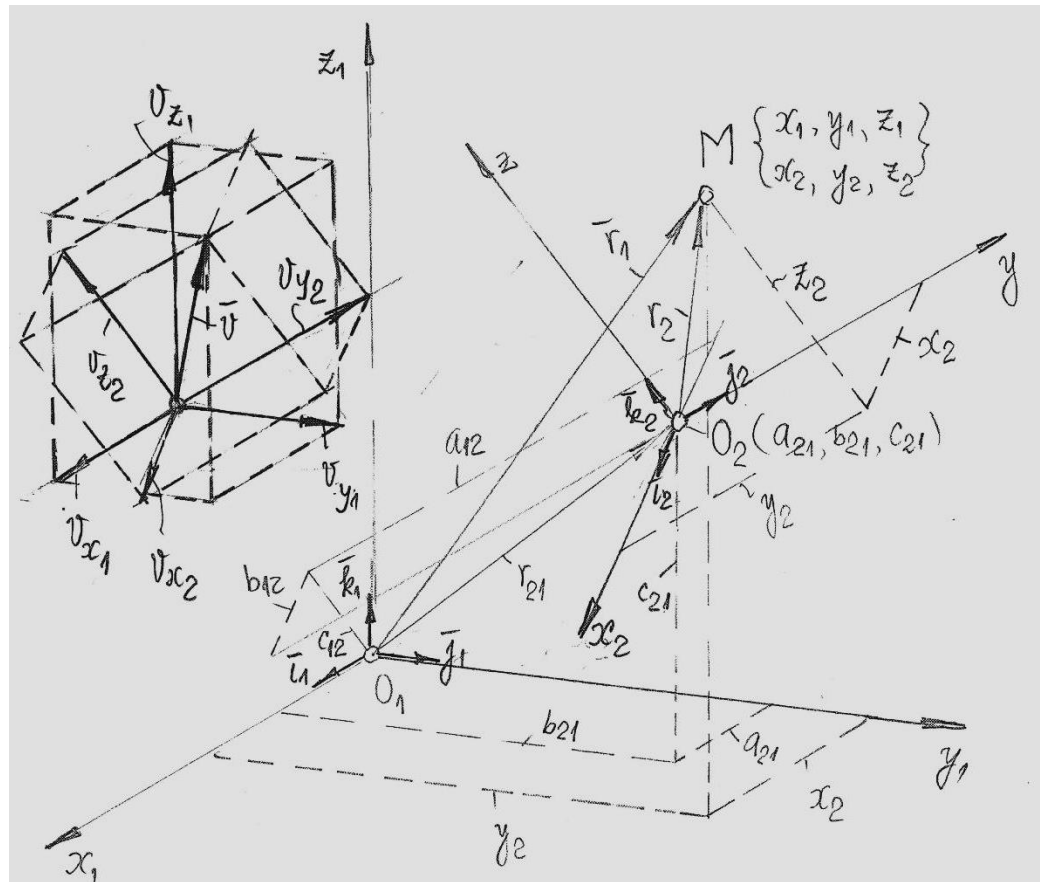
In spatiu (sistem de coordonate cartezian)



# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Tabelul urmatoar defineste unghiurile dintre versorii celor doua sisteme de coordonate,  $O_1x_1y_1z_1$  si  $O_2x_2y_2z_2$

	$\vec{i}_2$	$\vec{j}_2$	$\vec{k}_2$
$\vec{i}_1$	$\alpha'$	$\alpha''$	$\alpha'''$
$\vec{j}_1$	$\beta'$	$\beta''$	$\beta'''$
$\vec{k}_1$	$\gamma'$	$\gamma''$	$\gamma'''$



# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Se definesc astfel doua probleme generice (in functie de valorile cunoscute – date de intrare si valorile cerute – date de iesire):

Se dau:

$$x_2, y_2, z_2, a_{21}, b_{21}, c_{21}, \alpha', \dots, \gamma''', v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}$$

Se cer:

$$x_1, y_1, z_1, v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$$

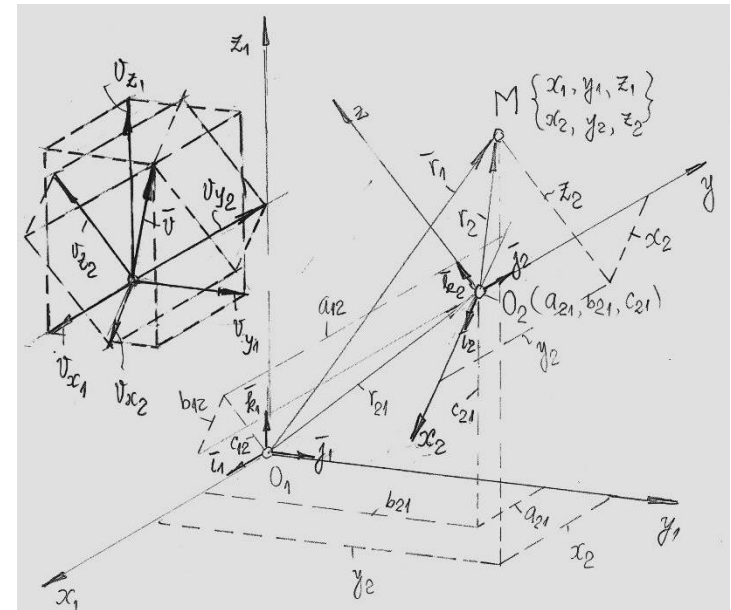
---

Se dau:

$$x_1, y_1, z_1, a_{21}, b_{21}, c_{21}, \alpha', \dots, \gamma''', v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$$

Se cer:

$$x_2, y_2, z_2, v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}$$

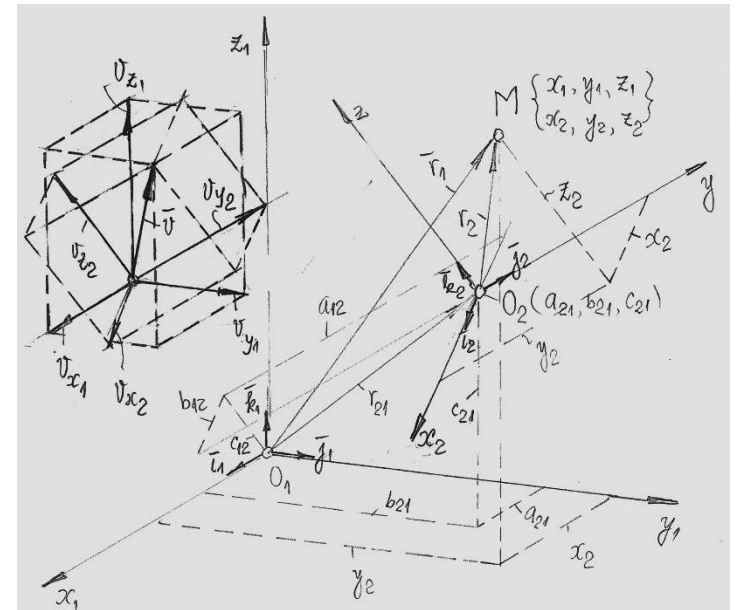


# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Vectorul  $v$  se poate scrie, in functie de sistemul de coordonate, prin compunerea proiectiilor acestuia pe axele sistemului:

$$\vec{v} = v_{x_2} \cdot \vec{i}_2 + v_{y_2} \cdot \vec{j}_2 + v_{z_2} \cdot \vec{k}_2$$

$$\vec{v} = v_{x_1} \cdot \vec{i}_1 + v_{y_1} \cdot \vec{j}_1 + v_{z_1} \cdot \vec{k}_1$$





# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din tabelul anterior (al unghiurilor) rezulta sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} \vec{i}_2 = (C\alpha')\vec{i}_1 + (C\beta')\vec{j}_1 + (C\gamma')\vec{k}_1 \\ \vec{j}_2 = (C\alpha'')\vec{i}_1 + (C\beta'')\vec{j}_1 + (C\gamma'')\vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 = (C\alpha''')\vec{i}_1 + (C\beta''')\vec{j}_1 + (C\gamma''')\vec{k}_1 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{bmatrix}$$



# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din tabelul anterior (al unghiurilor) rezulta sistemul de ecuatii:

$$\vec{v} = \left\{ v_{x_2} \cdot \left[ (C\alpha')\vec{i}_1 + (C\beta')\vec{j}_1 + (C\gamma')\vec{k}_1 \right] + \right. \\ \left. + v_{y_2} \cdot \left[ (C\alpha'')\vec{i}_1 + (C\beta'')\vec{j}_1 + (C\gamma'')\vec{k}_1 \right] + \right. \\ \left. + v_{z_2} \cdot \left[ (C\alpha''')\vec{i}_1 + (C\beta''')\vec{j}_1 + (C\gamma''')\vec{k}_1 \right] \right\}$$



$$\vec{v} = \left[ (C\alpha')v_{x_2} + (C\alpha'')v_{y_2} + (C\alpha''')v_{z_2} \right] \cdot \vec{i}_1 + \\ + \left[ (C\beta')v_{x_2} + (C\beta'')v_{y_2} + (C\beta''')v_{z_2} \right] \cdot \vec{j}_1 + \\ + \left[ (C\gamma')v_{x_2} + (C\gamma'')v_{y_2} + (C\gamma''')v_{z_2} \right] \cdot \vec{k}_1$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din tabelul anterior (al unghiurilor) rezulta sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} v_{x_1} = (C\alpha')v_{x_2} + (C\alpha'')v_{y_2} + (C\alpha''')v_{z_2} \\ v_{y_1} = (C\beta')v_{x_2} + (C\beta'')v_{y_2} + (C\beta''')v_{z_2} \\ v_{z_1} = (C\gamma')v_{x_2} + (C\gamma'')v_{y_2} + (C\gamma''')v_{z_2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & C\alpha''' \\ C\beta' & C\beta'' & C\beta''' \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' \end{bmatrix}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' \end{bmatrix}}_{R_{21}=R_{12}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{21}$$

$$\vec{v} = x_2 \cdot \vec{i}_2 + y_2 \cdot \vec{j}_2 + z_2 \cdot \vec{k}_2 = (x_1 - a_{21}) \cdot \vec{i}_1 + (y_1 - b_{21}) \cdot \vec{j}_1 + (z_1 - c_{21}) \cdot \vec{k}_1$$

$$\vec{v} = v_{x_2} \cdot \vec{i}_2 + v_{y_2} \cdot \vec{j}_2 + v_{z_2} \cdot \vec{k}_2 = v_{x_1} \cdot \vec{i}_1 + v_{y_1} \cdot \vec{j}_1 + v_{z_1} \cdot \vec{k}_1$$

$$v_{x_1} = x_1 - a_{21}; \quad v_{y_1} = y_1 - b_{21}; \quad v_{z_1} = z_1 - c_{21}$$

$$v_{x_2} = x_2; \quad v_{y_2} = y_2; \quad v_{z_2} = z_2$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din tabelul anterior (al unghiurilor) rezulta sistemul de ecuatii:

$$\begin{bmatrix} x_1 - a_{21} \\ y_1 - b_{21} \\ z_1 - c_{21} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & C\alpha''' \\ C\beta' & C\beta'' & C\beta''' \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' \end{bmatrix}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ b_{21} \\ c_{21} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & C\alpha''' \\ C\beta' & C\beta'' & C\beta''' \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' \end{bmatrix}}_{R_{12}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' \end{bmatrix}}_{R_{21}=R_{12}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - a_{21} \\ y_1 - b_{21} \\ z_1 - c_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & C\alpha''' & a_{21} \\ C\beta' & C\beta'' & C\beta''' & b_{21} \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' & c_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{12}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' & a_{12} \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' & b_{12} \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}=P_{12}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din tabelul anterior (al unghiurilor) rezulta sistemul de ecuatii:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a_{21} \\ -b_{21} \\ -c_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{21} \cdot C\alpha' + b_{21} \cdot C\beta' + b_{21} \cdot C\gamma') \\ -(a_{21} \cdot C\alpha'' + b_{21} \cdot C\beta'' + b_{21} \cdot C\gamma'') \\ -(a_{21} \cdot C\alpha''' + b_{21} \cdot C\beta''' + b_{21} \cdot C\gamma''') \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' & -(a_{21} \cdot C\alpha' + b_{21} \cdot C\beta' + b_{21} \cdot C\gamma') \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' & -(a_{21} \cdot C\alpha'' + b_{21} \cdot C\beta'' + b_{21} \cdot C\gamma'') \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' & -(a_{21} \cdot C\alpha''' + b_{21} \cdot C\beta''' + b_{21} \cdot C\gamma''') \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}=P_{12}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate

Din tabelul anterior (al unghiurilor) rezulta sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} a_{12} = -(a_{21} \cdot C\alpha' + b_{21} \cdot C\beta' + b_{21} \cdot C\gamma') \\ b_{12} = -(a_{21} \cdot C\alpha'' + b_{21} \cdot C\beta'' + b_{21} \cdot C\gamma'') \\ c_{12} = -(a_{21} \cdot C\alpha''' + b_{21} \cdot C\beta''' + b_{21} \cdot C\gamma''') \end{cases}$$

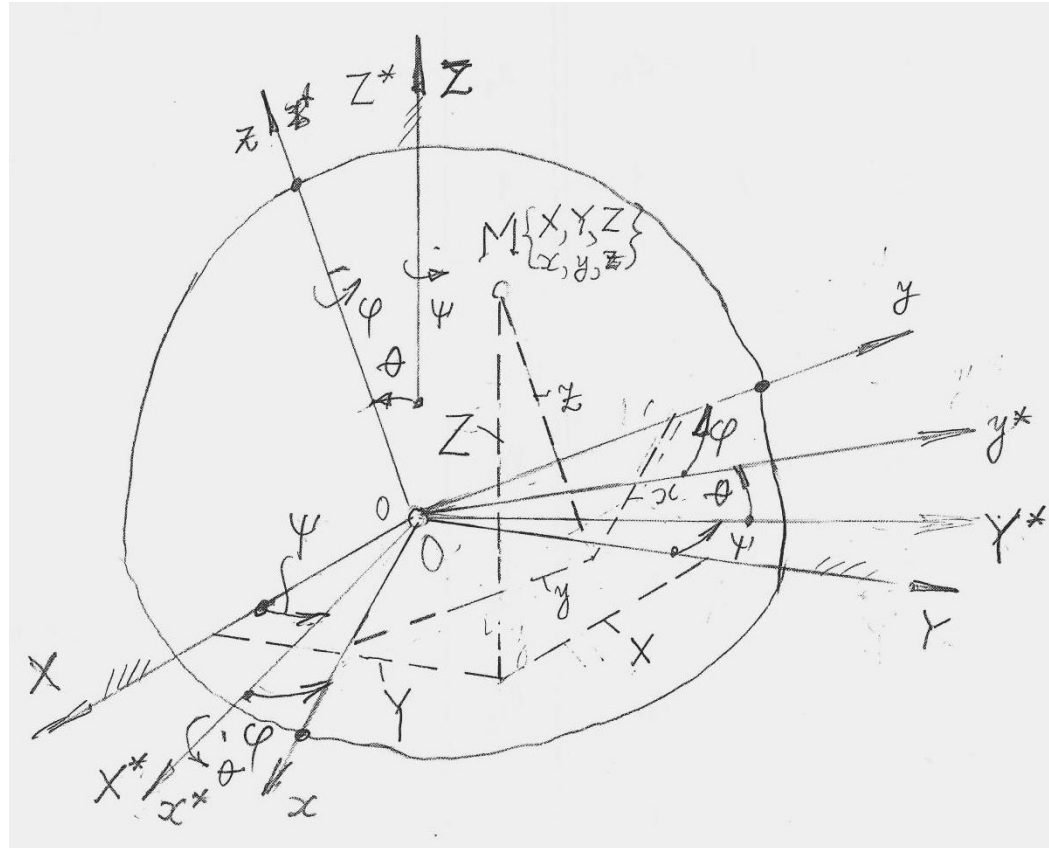


$$\begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & C\alpha''' & a_{21} \\ C\beta' & C\beta'' & C\beta''' & b_{21} \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' & c_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{12}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\beta' & C\gamma' & -(a_{21} \cdot C\alpha' + b_{21} \cdot C\beta' + b_{21} \cdot C\gamma') \\ C\alpha'' & C\beta'' & C\gamma'' & -(a_{21} \cdot C\alpha'' + b_{21} \cdot C\beta'' + b_{21} \cdot C\gamma'') \\ C\alpha''' & C\beta''' & C\gamma''' & -(a_{21} \cdot C\alpha''' + b_{21} \cdot C\beta''' + b_{21} \cdot C\gamma''') \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}=P_{12}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate – conventia ZX\*z\*

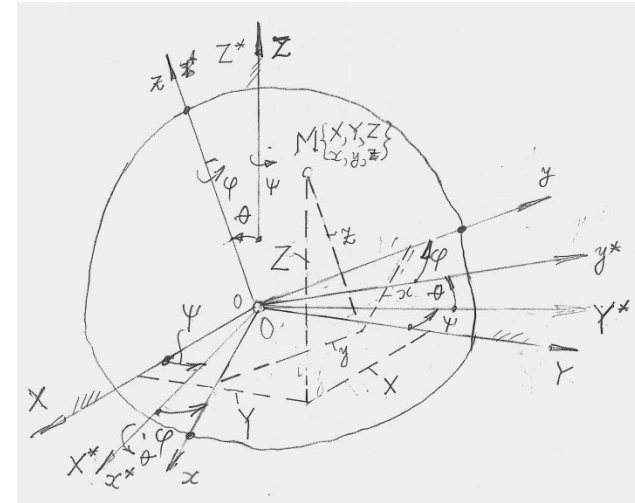


# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate – conventia ZX\*z\*

Rotatia in jurul axei Z cu unghiul  $\psi$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_Z(\psi)} \cdot \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_X(\psi)} \cdot \begin{bmatrix} v_X^* \\ v_Y^* \\ v_Z^* \end{bmatrix}$$



Rotatia in jurul axei X\* cu unghiul  $\theta$

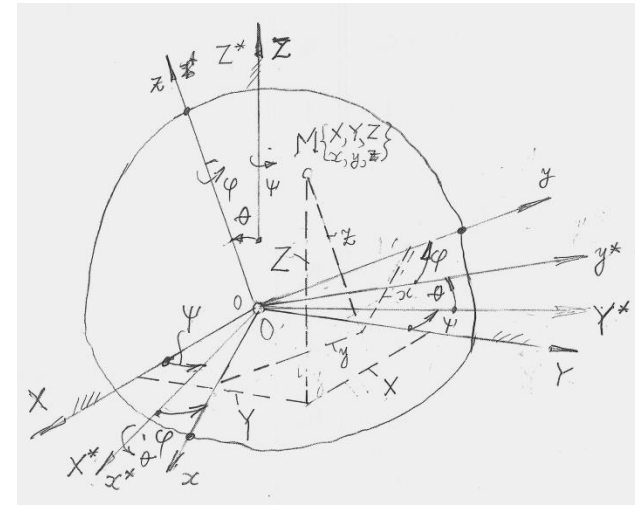
$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{X^*}(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_X^* \\ v_Y^* \\ v_Z^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}}_{R_{X^*}(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} v_x^* \\ v_y^* \\ v_z^* \end{bmatrix}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate – conventia ZX\*z\*

Rotatia in jurul axei z\* cu unghiul  $\varphi$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_z^*(\varphi)} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_x^* \\ v_y^* \\ v_z^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z^*(\varphi)} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$





# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate – conventia ZX\*z\*

Astfel rezulta

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_Z(\psi)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_X(\theta)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{z^*}(\varphi)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C\alpha' & C\alpha'' & C\alpha''' \\ C\beta' & C\beta'' & C\beta''' \\ C\gamma' & C\gamma'' & C\gamma''' \end{bmatrix}}_{R(\alpha', \dots, \gamma''')} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_Z(\psi)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}}_{R_{X^*}(\theta)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{z^*}(\varphi)}$$

# Relatii de transformare intre sisteme de coordonate – conventia ZX\*z\*

Sau

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\psi \cdot C\varphi - & C\psi \cdot S\varphi - & S\psi \cdot S\theta & 0 \\ -S\psi \cdot C\theta \cdot S\varphi & -S\psi \cdot C\theta \cdot C\varphi & & \\ S\psi \cdot C\varphi + & -S\psi \cdot S\varphi + & -C\psi \cdot S\theta & 0 \\ +C\psi \cdot C\theta \cdot S\varphi & +C\psi \cdot C\theta \cdot C\varphi & & \\ S\theta \cdot S\varphi & S\theta \cdot C\varphi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P(\psi, \theta, \varphi)} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\psi \cdot C\varphi - & C\psi \cdot S\varphi - & S\psi \cdot S\theta \\ -S\psi \cdot C\theta \cdot S\varphi & -S\psi \cdot C\theta \cdot C\varphi & \\ S\psi \cdot C\varphi + & -S\psi \cdot S\varphi + & -C\psi \cdot S\theta \\ +C\psi \cdot C\theta \cdot S\varphi & +C\psi \cdot C\theta \cdot C\varphi & \\ S\theta \cdot S\varphi & S\theta \cdot C\varphi & C\theta \end{bmatrix}}_{R(\psi, \theta, \varphi)}$$

# Parametrii pentru cinematica

Cuple motoare

$$\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6]^T$$

$$\ddot{q} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6]^T$$

Efector final

$$\dot{X}_P = [\dot{X}_G, \dot{Y}_G, \dot{Z}_G, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]^T$$

$$\ddot{X}_P = [\ddot{X}_G, \ddot{Y}_G, \ddot{Z}_G, \ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}]^T$$

# Analiza singularitatilor

Intre vectorul vitezelor coordonatelor efectorului final  $\dot{X}$  si vectorul vitezelor coordonatelor generalizate motoare  $\dot{q}$  se poate scrie relatia:

$$A \cdot \dot{X} + B \cdot \dot{q} = 0$$

A - Jacobianul obtinut prin derivarea ecuatiilor de inchidere ale mecanismului functie de coordonatele efectorului final

B - Jacobianul obtinut prin derivarea ecuatiilor de inchidere ale mecanismului functie de coordonatele generalizate motoare

Ecuatiile de inchidere au forma:

$$\begin{cases} f_1(X, Q) = 0 \\ f_2(X, Q) = 0 \\ \vdots \\ f_6(X, Q) = 0 \end{cases}$$

# Analiza singularitatilor

*Matricea A are forma:*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_G} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_G} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_G} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_G} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_G} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_G} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_G} & \frac{\partial f_3}{\partial Y_G} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_G} & \frac{\partial f_3}{\partial \psi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_4}{\partial X_G} & \frac{\partial f_4}{\partial Y_G} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_G} & \frac{\partial f_4}{\partial \psi} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta} & \frac{\partial f_4}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_5}{\partial X_G} & \frac{\partial f_5}{\partial Y_G} & \frac{\partial f_5}{\partial Z_G} & \frac{\partial f_5}{\partial \psi} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta} & \frac{\partial f_5}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_6}{\partial X_G} & \frac{\partial f_6}{\partial Y_G} & \frac{\partial f_6}{\partial Z_G} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta} & \frac{\partial f_6}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

*Matricea B are forma:*

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} & \frac{\partial f_1}{\partial q_4} & \frac{\partial f_1}{\partial q_5} & \frac{\partial f_1}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} & \frac{\partial f_2}{\partial q_4} & \frac{\partial f_2}{\partial q_5} & \frac{\partial f_2}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} & \frac{\partial f_3}{\partial q_4} & \frac{\partial f_3}{\partial q_5} & \frac{\partial f_3}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q_1} & \frac{\partial f_4}{\partial q_2} & \frac{\partial f_4}{\partial q_3} & \frac{\partial f_4}{\partial q_4} & \frac{\partial f_4}{\partial q_5} & \frac{\partial f_4}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial q_1} & \frac{\partial f_5}{\partial q_2} & \frac{\partial f_5}{\partial q_3} & \frac{\partial f_5}{\partial q_4} & \frac{\partial f_5}{\partial q_5} & \frac{\partial f_5}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6}{\partial q_2} & \frac{\partial f_6}{\partial q_3} & \frac{\partial f_6}{\partial q_4} & \frac{\partial f_6}{\partial q_5} & \frac{\partial f_6}{\partial q_6} \end{bmatrix}$$

# Analiza singularitatilor

## Singularitati de tipul I

$$\det(B) = 0$$

In cazul în care determinantul matricei B devine 0, robotul ajunge in pozitii in care se blocheaza, pierzand unul sau mai multe grade de libertate. Pentru comanda robotului, aceste pozitii trebuie gasite si evitate sau eliminate din spatiul de lucru al robotului.

# Analiza singularitatilor

## Singularitati de tipul II

$$\det(A) = 0$$

In cazul în care determinantul matricei A devine 0, robotul castigă unul sau mai multe grade de libertate, ceea ce îl face necontrolabil. Pentru o comanda riguroasa a robotului, aceste pozitii trebuie gasite, evitate sau eliminate.

# Analiza singularitatilor

## Singularitati de tipul III

$$\det(A) = 0 \quad \text{si} \quad \det(B) = 0$$

Ultimul tip de singularitati care pot sa apara sunt cele arhitecturale, care se intalnesc in pozitiile pentru care determinantii celor doua matrice, A si B sunt nuli. Aceste singularitati se pot, de obicei, evita inca din faza de proiectare a mecanismului.



# Modelarea spatiului de lucru

Metode geometrice

Metode analitice

## Metode geometrice

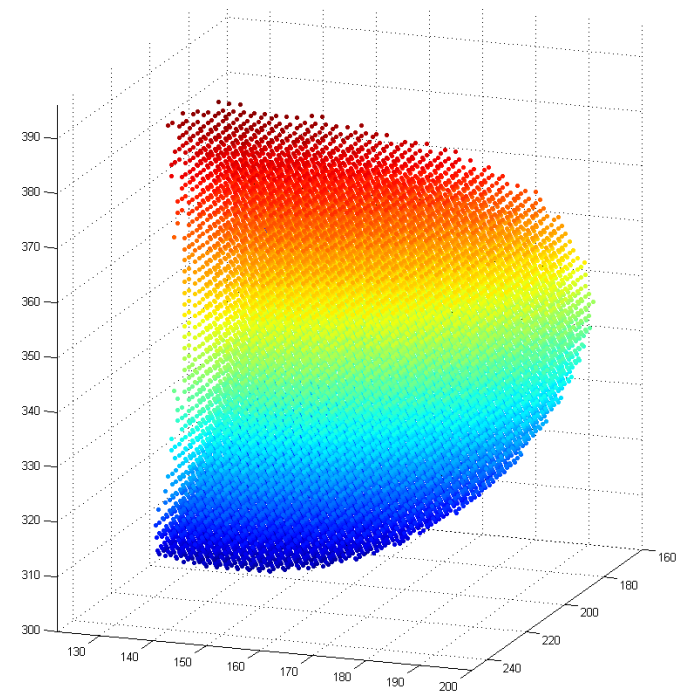
Modelarea unor sectiuni/volume

Intersectia unor sectiu/volume

## Metode analitice

Modelarea spatiului de lucru utilizand modelul geometric direct

Modelarea spatiului de lucru utilizand modelul geometric invers



# Modelarea cinematica – analiza sinoptica

$$A \cdot \dot{X} + B \cdot \dot{q} = 0$$



$$\dot{X} = -A^{-1} \cdot B \cdot \dot{q}$$

Model cinematic direct

$$\dot{q} = -B^{-1} \cdot A \cdot \dot{X}$$

Model cinematic invers

# Modelarea cinematica – analiza sinoptica

$$A \cdot \ddot{X} + \dot{A} \cdot \dot{X} + B \cdot \ddot{q} + \dot{B} \cdot \dot{q} = 0$$



$$\ddot{X} = -A^{-1} \cdot (\dot{A} \cdot \dot{X} + B \cdot \ddot{q} + \dot{B} \cdot \dot{q}) \quad \ddot{q} = -B^{-1} \cdot (\dot{A} \cdot \dot{X} + A \cdot \ddot{X} + \dot{B} \cdot \dot{q})$$

Model cinematic direct

Model cinematic invers

# Modelarea cinematica – analiza sinoptica

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial Y_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial Z_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial Y_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial Z_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial X_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial Y_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial Z_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial \psi} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial X_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial Y_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial Z_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial \psi} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial X_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial Y_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial Z_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial \psi} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial \theta} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial X_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial Y_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial Z_E} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial \psi} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial \theta} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial \varphi} \right) \end{bmatrix}$$

# Modelarea cinematica – analiza sinoptica

$$\dot{B} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_4} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_5} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_6} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_4} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_5} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_6} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_1} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_2} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_4} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_5} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_6} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_2} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_3} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_4} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_5} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_4}{\partial q_6} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial q_1} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial q_2} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial q_3} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial q_4} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial q_5} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_5}{\partial q_6} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial q_1} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial q_2} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial q_3} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial q_4} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial q_5} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_6}{\partial q_6} \right) \end{bmatrix}$$